Hans-Dieter Rinkens, Katja Eilerts

Feldstudie zur beginnenden Rechenfertigkeit von Erstklässlern

Zusammenfassung:

Ergebnisse einer Feldstudie mit etwa 2500 Erstklässlern, in der arithmetische Fähigkeiten im Bereich des Addierens und Subtrahierens nach der materialgebundenen Einführungsphase erhoben wurden, werden im Überblick vorgestellt. Dabei wurde der Leitfrage nachgegangen, welche Rechensätze des Einspluseins und des Einsminuseins Kernsätze sind, die eher als andere automatisiert werden, welche Rechenstrategien erkennbar sind und welche Rechenfehler häufiger als andere auftreten. Auf der Basis der Ergebnisse werden Hinweise für den Arithmetikunterricht in Klasse 1 gegeben.

Abstract:

This article presents the main results of a mathematical field-study including 2500 first graders. The study is designed as a research on children's arithmetic abilities in the field of addition and subtraction after having participated in an introductory phase based on materials. It was our central aim to find out which of the basic addition and subtraction problems are key problems the children deal with in an automatic way earlier than they do with others, which arithmetic strategies used by them can be recognized and which mistakes appear more often than others. The assessment and interpretation of children's mathematical abilities after the introductory phase allow us to make suggestions for teaching and learning processes within school mathematics.

1 Vorwort

Zu den arithmetischen Fähigkeiten von Kindern bei Schuleintritt gibt es eine Reihe von Untersuchungen (Heuvel-Panhuizen 1995; Selter 1995; Grassmann et al. 1995; Knapstein/Spiegel 1995, Rinkens o. J.). Viele Untersuchungen – ob Fallstudien oder Feldstudien – haben im Wesentlichen folgendes Design: Den Kindern wird eine Geschichte (mit oder ohne Bild) erzählt, die nach Auffassung des Untersuchers eine Aktivität enthält, die auf eine Addition oder eine Subtraktion führt. Beispiel: "Im Bus sind sieben Kinder. An der nächsten Haltestelle steigen vier Kinder ein. Wie viele Kinder sind dann im Bus?" Die Kinder sagen die Lösungszahl oder wählen aus einem Angebot geschriebener Zahlen die richtige aus. Die meisten Kinder werden wohl durch inneres Nachspielen der Situation und entsprechendes Auszählen zu ihrem Ergebnis kommen, wobei durchaus unterschiedliche Zählstrategien zum Tragen kommen. Im Falle der Auswahlantwort wird auch noch die Kenntnis der geschriebenen Zahlen vorausgesetzt. Aufgaben dieses Typs sind auch charakteristisch für die Begriffsbildungsphase im Anfangsunterricht, anders gesagt: für die materialgebundene Einführung von Addition und Subtraktion.

Wie aber kommt das Einspluseins in den Kopf? Man kann den Weg dorthin als Entwicklung einer inneren Landkarte verstehen - mit einer wachsenden Zahl von Orientierungspunkten, wobei Orientierungspunkt heißt, dass man nicht nur den Punkt kennt, sondern auch weiß, wie man von dort nach hier und umgekehrt kommt, dass man sich orientieren kann. Wie orientieren sich Kinder und gibt es besondere Orientierungspunkte bei der Entwicklung der Einspluseins-Karte? So könnte man die Leitfrage unserer Feldstudie beschreiben.[1] Oder etwas weniger bildhaft: Welche Rechensätze des Einspluseins und des Einsminuseins sind Kernsätze, die eher als andere automatisiert werden, und welche Rechenstrategien werden angewendet?

Um vergleichbare Ausgangsbedingungen zu haben, kamen nur Klassen in die Untersuchung, die das Unterrichtswerk WELT DER ZAHL (Rinkens/Hönisch 1998) benutzten. Das Unterrichtswerk geht vom Prinzip des ganzheitlichen Lernens aus ("Das Kind lernt mit den Sinnen, mit Gefühlen, mit Verstand."), das einen handlungsorientierten Mathematikunterricht und eine am entdeckenden Lernen orientierte Unterrichtsorganisation einschließt und Mathematiklernen als einen konstruktiven Akt des Kindes in sozialer Lernumgebung auffasst. Der Zeitpunkt der Untersuchung lag vor dem Zur-Sprache-Bringen einzelner Rechenstrategien und vor Übungseinheiten, die auf Automatisierung abzielen. Bis zu diesem Zeitpunkt kamen die Zahlen bis zwanzig vor – in der Zahlenreihe wie in Zerlegungen. Grundvorstellungen des Addierens und des Subtrahierens wurden handlungsorientiert und mit strukturiertem Material gewonnen.

Im Frühjahr 2001 wurde eine Pilotstudie durchgeführt und ausgewertet (Weigt 2001), ein Jahr später die Hauptuntersuchung (Heimann 2002; Schaper 2002; Gooßen 2003). Ein wesentlicher Unterschied zwischen der Pilotstudie und der Hauptuntersuchung war neben der fast zehnfachen Zahl der Probanden, dass in der Pilotstudie die Auswahl der Aufgaben vom Untersucher vorgenommen wurde. Streng genommen wurde also die Hypothese des Untersuchers getestet, dass diese Aufgaben im Blick auf seine Leitfragen repräsentativ sind. Wegen der hohen Zahl an Probanden konnten wir bei der Hauptuntersuchung auf diese Einschränkung weitgehend verzichten, d.h. alle Aufgaben des Einspluseins und Einsminuseins in die Tests einbeziehen. Im Folgenden werden Pilot- und Hauptstudie zusammen dargestellt.

Wegen der Fülle an Daten und Ergebnissen werden wir das Untersuchungsdesign vorab erläutern (Abschnitt 2) und danach auf die Ergebnisse zur Addition (Abschnitt 3), zur Subtraktion (Abschnitt 4) und anschließend auf die Fehleranalyse (Abschnitt 5) eingehen, ehe wir eine Zusammenfassung mit möglichen Konsequenzen für den Anfangsunterricht versuchen (Abschnitt 6).

An einigen Schulen konnten wir die Durchführung des Tests begleiten und so erlebten wir auch folgende Szene: Eine Lehrerin warf einen Blick auf den Test, den ihre Kollegin ihren Schülerinnen und Schülern gestellt hatte und meinte: *„ ...die Aufgabe 15-11 darf den Kindern im ersten Schuljahr doch noch nicht gestellt werden; zweistellige Zahlen voneinander subtrahieren, das ist noch viel zu schwer...“* Und das Testergebnis?

---

[1] Wir danken dem Schroedel-Verlag für die Unterstützung der Feldstudie.

59 Prozent der Schülerinnen und Schüler haben diese Aufgabe richtig gelöst, und zwar am Ende des ersten Schulhalbjahres.

2 Untersuchungs-Design

Die Pilotstudie im Frühjahr 2001 wurde an fünf Schulen (12 Klassen) in Nordrhein-Westfalen durchgeführt, wobei 263 Kinder am Additionstest und 256 Kinder am Subtraktionstest teilgenommen haben. In der Hauptuntersuchung wurden die Additionsaufgaben von 2492 Kindern in 113 Klassen an 48 Schulen und die Subtraktionsaufgaben von 2427 Kindern in 111 Klassen an 49 Grundschulen bearbeitet.

Jedes Kind bekam ein DIN A6 großes Heft. Dem Deckblatt, auf dem die Kinder ihren Namen eintrugen, folgten 21 Aufgabenblätter mit einer Aufgabe pro Blatt. Dadurch gab es noch Platz, Dinge zu notieren oder zu zeichnen. Die Lehrerinnen wurden gebeten, den Kindern keine Hinweise oder Aufforderungen zum Zeichnen zu geben, allerdings es auch nicht zu verbieten. Zu Anfang des Tests sollten die Lehrerinnen den Kindern deutlich machen, dass sie nicht alle Aufgaben bearbeiten müssten, dass sie also zur nächsten Aufgabe weiterblättern durften, wenn sie eine Aufgabe nicht lösen konnten.

Der Additionstest und der Subtraktionstest wurden im Abstand von mindestens zwei Tagen durchgeführt. Es gab keine Zeitbegrenzung, so dass die Kinder nicht unter Zeitdruck standen. Jede am Test beteiligte Lehrerin sandte zusammen mit den Testheften ihrer Klasse ein Blatt zurück, auf dem Angaben über die Schule, die Klassengröße, die im Unterricht benutzten Materialien sowie das Datum des Tests und die Seitenzahl im Mathematikbuch zum Zeitpunkt der Durchführung vermerkt wurden. Die Auswertung dieser Rückmeldungen zeigte, dass die Kinder im Durchschnitt ca. 20 Minuten für die Berechnung der 21 Aufgaben eines Tests brauchten.

Die Aufgaben wurden den Kindern in der formalen Gleichungsschreibweise "a + b =" und "a - b =" gestellt.

Alle vorkommenden Zahlen (gegebene wie gesuchte) lagen im Zahlenraum bis zwanzig. Zum Einspluseins gehören insgesamt 231 Additionsaufgaben. Entsprechendes gilt für die Subtraktionsaufgaben. Da ein Kind nicht alle diese Aufgaben in einem Test lösen kann, müssen mit Blick auf die interessierenden Fragen Entscheidungen getroffen werden.

In der Pilotstudie wurden sechs Leitfragen (mit Untergliederung) formuliert (Abb. 1). Die Kinder sollten zu jeder dieser Fragen mindestens zwei Aufgaben berechnen, so dass die Auswertung im Hinblick auf die aufgestellten Thesen auf mindestens zwei Aufgaben basiert. Die Aufgaben wurden unter diesem Gesichtspunkt vom Untersucher ausgewählt und allen 263 bzw. 256 Kindern gestellt.

Man kann natürlich kritisch anmerken: Ist eine bestimmte ausgewählte Aufgabe wirklich typisch für die gestellte Leitfrage? Gibt es andere Effekte mit anderen Aufgaben, die durch die vom Untersucher getroffene Auswahl verdeckt werden? Will man die Zahl der in den Test einbezogenen Aufgaben drastisch erhöhen, jedes Kind davon aber nur einen Teil lösen lassen, gleichwohl aber jede der Testaufgaben von hinreichend vielen Kindern bearbeiten lassen, braucht man einen großen Kreis von Testpersonen und muss dennoch die 231 möglichen Aufgaben nach den Leitfragen gruppieren.

<table>
<tr><th>Addieren</th><th>Subtrahieren</th></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Stellt die Zahl Zehn für die Kinder eine Schwellenzahl dar?</u>
▪ Ist der Zehnerübergang ein wirkliches Hindernis für Kinder?
▪ Ist die Zahl Zehn für die Kinder eine besondere Zahl, so dass ihnen Aufgaben leichter fallen, die als Ergebnis Nachbarzahlen von zehn, also neun oder elf, haben?</td></tr>
<tr><td>▪ Ist die Zahl Zehn für die Kinder eine besondere Zahl, so dass sie Aufgaben mit dem Ergebnis Zehn oder Zwanzig oder Aufgaben mit einem Summanden Zehn leichter lösen?</td><td>▪ Ist die Zahl Zehn für die Kinder eine besondere Zahl, so dass sie Aufgaben mit dem Minuend zehn oder zwanzig oder Aufgaben, deren Subtrahend oder Ergebnis zehn ist, leichter lösen?</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Stellt die Zahl Zwölf eine sprachlich bedingte Schwellenzahl dar?</u>
▪ Ist es für die Kinder einfacher, Aufgaben zu berechnen, die den Zahlenraum bis zwölf nicht überschreiten?</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Aufgaben mit der Null</u></td></tr>
<tr><td>▪ Fällt Kindern das Lösen von Aufgaben, in denen ein Summand Null ist, schwerer?
▪ Macht es einen Unterschied, ob der erste oder der zweite Summand Null ist?</td><td>▪ Fällt Kindern das Lösen von Aufgaben mit dem Subtrahend Null schwerer?
▪ Fällt Kindern das Lösen von Aufgaben mit Null als Ergebnis schwerer?</td></tr>
<tr><td><u>Tauschaufgaben</u>
▪ Werden Tauschaufgaben erkannt? Wird die Kommutativität genutzt?</td><td><u>Ergänzen</u>
▪ Sind Aufgaben mit dem Ergebnis Eins leichter? Werden Aufgaben mit Hilfe des Ergänzens gelöst?</td></tr>
<tr><td><u>Verdopplungs- und Fastverdopplungsaufgaben</u>
▪ Können die Kinder Verdopplungsaufgaben bzw. Fastverdopplungsaufgaben häufiger fehlerfrei berechnen als andere Aufgaben?</td><td><u>Halbierungs- und Fasthalbierungsaufgaben</u>
▪ Können die Kinder Halbierungsaufgaben bzw. Fasthalbierungsaufgaben häufiger fehlerfrei berechnen als andere Aufgaben?</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Analogieaufgaben</u>
▪ Werden Analogieaufgaben zwischen dem ersten und zweiten Zehner von den Schülern erkannt? Wird die Analogie genutzt?</td></tr>
</table>

Abb. 1: Leitfragen (Pilotstudie)

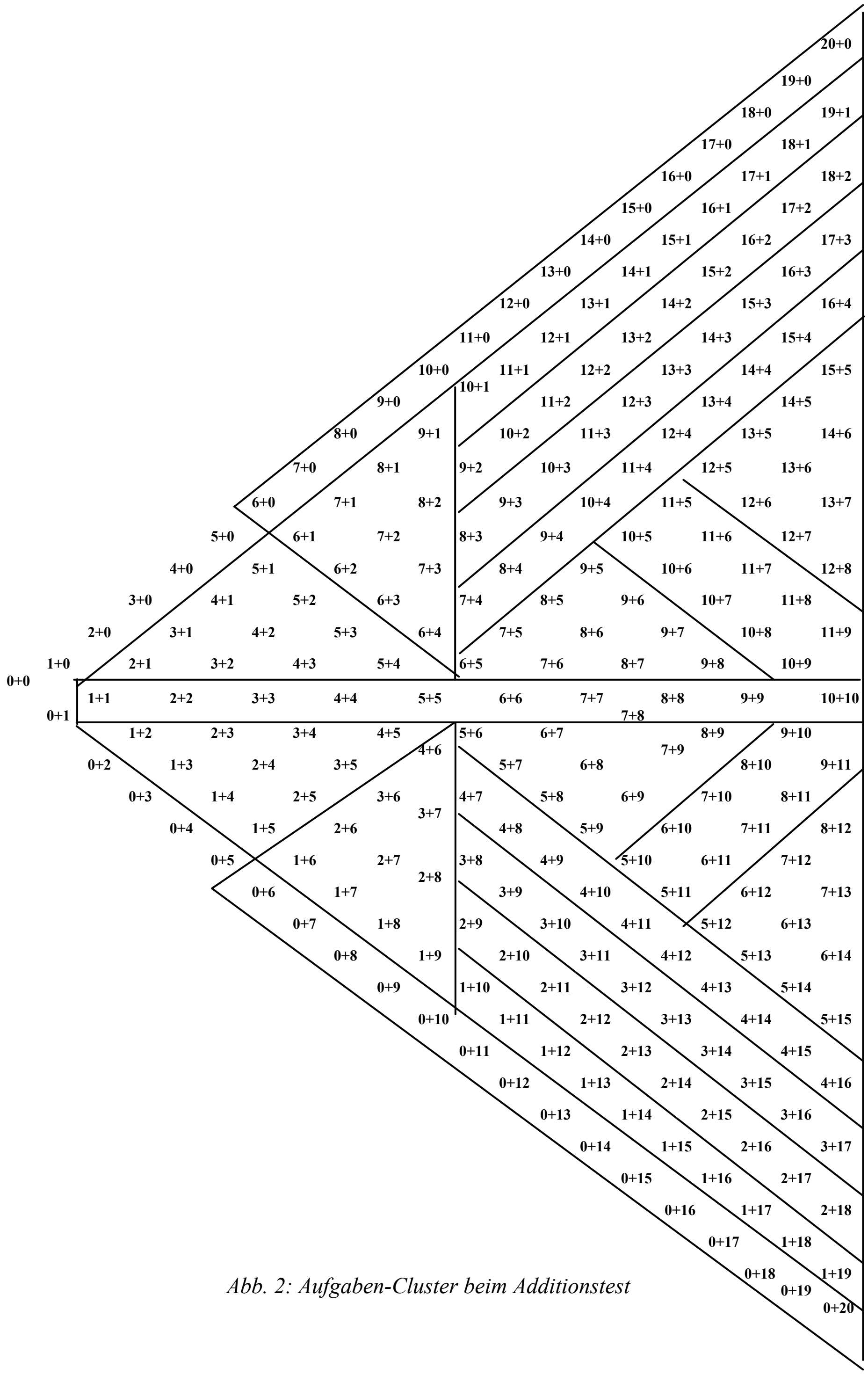

Abb. 2: Aufgaben-Cluster beim Additionstest

Die Pilotstudie hatte ergeben (und die Hauptuntersuchung noch einmal bestätigt), dass die Aufgaben mit der Zahl Null den wenigsten Kindern Schwierigkeiten bereiten, sowohl wenn die *Zahl Null* als Summand bzw. als Subtrahend oder Differenz vorkommt: Kinder "sehen" das Ergebnis – wir könnten hinzusetzen: weil sie Einsicht in die Bedeutung der Null und in die Bedeutung der Operationen haben und deshalb nicht wirklich rechnen müssen. Elf (nach der Pilotstudie) besonders leichte Aufgaben mit der Null (z.B. 3 + 0 oder 3 - 3) wurden deshalb nicht in die Hauptuntersuchung aufgenommen. Die verbleibenden 220 Aufgaben wurden in jeweils 21 Cluster eingeteilt (Abb. 2).

Jedes Cluster entspricht in etwa einem Aufgabentyp, orientiert an den Leitfragen. Bis auf Aufgaben mit der Null bestehen alle Cluster aus zehn Aufgaben. Beim Additionstest kommen noch zwei Cluster mit je 15 Aufgaben mit der Null als Summand hinzu, beim Subtraktionstest zwei Cluster mit je 15 Aufgaben, in denen die Null als Subtrahend bzw. als Ergebnis vorkommt.

Die einzelnen Testhefte für die Kinder wurden nun mit Hilfe eines Zufallsgenerators erstellt: Aus jedem Cluster wurde eine Aufgabe ausgewählt; bis auf das erste Cluster, das stets einen einfachen Aufgabentyp repräsentiert, wurde die Reihenfolge der Cluster randomisiert.

So wurde erreicht, dass

- jedes Kind mit einer leichten Aufgabe begann und ansonsten Aufgaben jedes Schwierigkeitsgrads erhielt,
- der Ermüdungseffekt (die letzten Aufgaben eines Tests werden schlechter gelöst, obwohl sie nicht "schwerer" sind[2]) ausgeglichen wurde, weil die Aufgabe eines bestimmten Clusters am Anfang, in der Mitte oder am Ende eines Testhefts stehen konnte,
- beim Additionstest jede der 220 Aufgaben von mindestens 146 Kindern, beim Subtraktionstest von mindestens 141 Kindern bearbeitet wurde.

3 Ergebnisse des Additionstests

Abbildung 3 zeigt, wie viel Prozent der Kinder, denen die jeweilige Additionsaufgabe zur Bearbeitung vorgelegt wurde[3], ein richtiges Ergebnis notierten.

2 Gut zwei Drittel aller nicht bearbeiteten Aufgaben verteilen sich auf die letzten fünf Aufgaben eines Testheftes.

3 N liegt zwischen 146 und 284

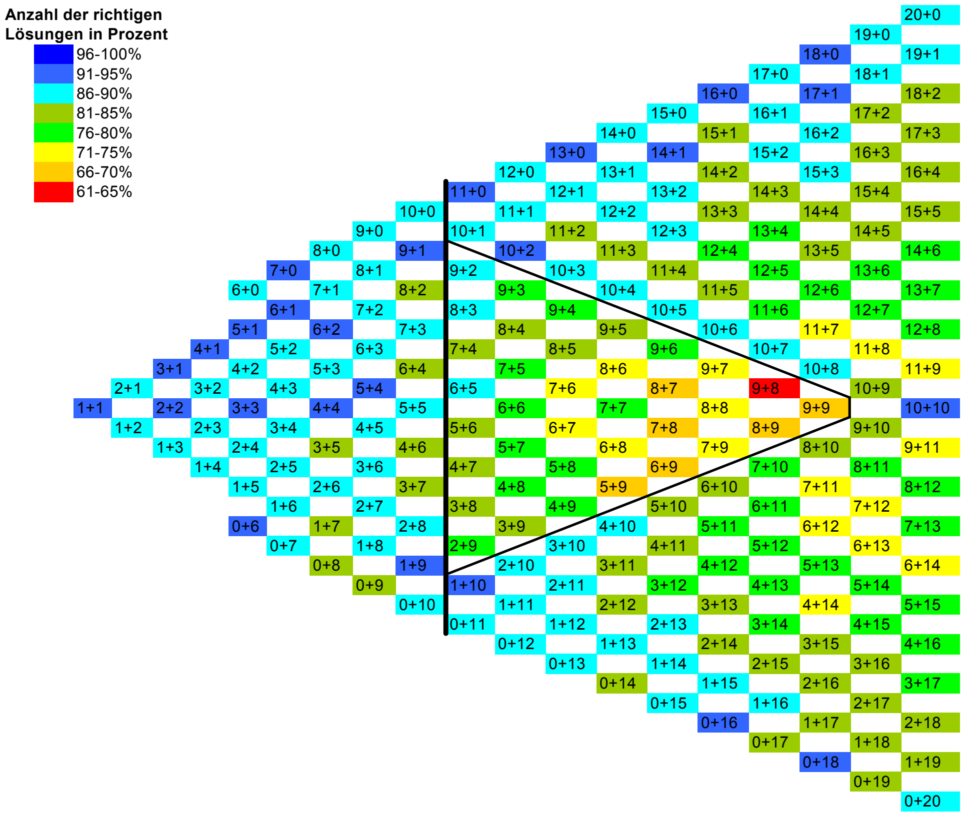

Abb. 3: Ergebnisse des Additionstests

Beim ersten Blick auf die Auswertung des Additionstests verblüfft – ganz ähnlich wie bei den zitierten Untersuchungen zu den arithmetischen Vorkenntnissen der Kinder bei Schuleintritt – das „gute" Gesamtergebnis. Im Durchschnitt sind alle Aufgaben im Zahlenraum bis 10 zu 89 Prozent und im Zahlenraum zwischen 10 und 20 zu 82 Prozent korrekt bearbeitet worden. Selbst die Aufgabe mit den wenigsten richtigen Lösungen, welche von insgesamt 258 Kindern bearbeitet wurde, nämlich 9 + 8, wurde noch von 62 Prozent (161 Kindern) gegen Ende des ersten Schulhalbjahres richtig gelöst. Die Additionsaufgabe 18 + 0, welche 159 Kindern vorlag, ist von 93 Prozent richtig gelöst worden. Nur elf Kinder haben diese Aufgabe falsch oder gar nicht gelöst.

3.1 Die „handelnde" Zahl

Bei der Untersuchung hat sich bestätigt, dass die Kinder mit zunehmender Größe der beiden Rechenzahlen die *Sicherheit in der Zahlreihe* verlieren. Auf den ersten Blick sind Auffälligkeiten in der Umgebung der Aufgabe 9 + 9 zu bemerken. Dort sind besonders im Vergleich zu den anderen Bereichen die Aufgaben „nur" zu 61 bis 80 Prozent richtig gelöst worden. Im Zahlenraum bis Zehn wurden dagegen die Aufgaben insgesamt mit 85 bis 100 Prozent am Besten bearbeitet. Aufgaben mit zwei „großen" Summanden bereiten den Kindern die größten Schwierigkeiten.

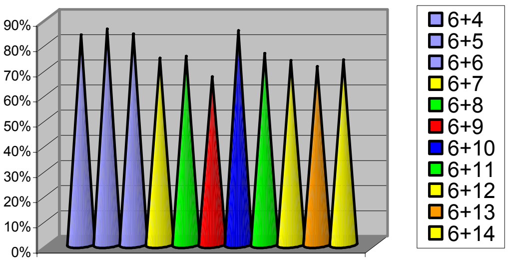

Abb. 4: Bedeutung der handelnden Zahl

Die geringere Sicherheit im Rechnen bei größer werdenden Zahlen lässt sich noch etwas genauer beschreiben: Die *„handelnde" Zahl* spielt eine entscheidende Rolle für die richtige Bearbeitung einer Aufgabe. Abbildung 4 zeigt dies am Beispiel der Aufgaben 6 + x. Allerdings wird der Effekt von zwei anderen Effekten überlagert: Zum einen spielt die Zehn eine besondere Rolle; eine erste Einsicht in den dezimalen Aufbau der Zahlreihe wird genutzt. Zum andern werden die letzen drei Aufgaben trotz des größer werdenden zweiten Summanden gut gelöst – ein Hinweis auf die Ausnutzung der Kommutativität (s.u.).

Neben der globalen Betrachtung hinsichtlich der einzelnen Aufgaben, bei der sich Unterschiede zwischen den Klassen und den Kindern überlagern können, sollen die Leitfragen auch aus der Sicht des einzelnen Kindes angegangen werden. Das methodische Instrument ist der *individuelle Vergleich* hinsichtlich des betrachteten Merkmals. Um die Rolle der „handelnden" Zahl aus der Sicht des einzelnen Kindes zu untersuchen, wurde wie folgt verfahren:

Jedes Kind hatte mehrere Aufgaben sowohl mit *kleinen* als auch mit *großen „handelnden" Zahlen* bearbeitet. Aus jedem Testheft wurde von jedem dieser beiden Typen[4] jeweils eine Aufgabe zufällig ausgewählt und die Lösungen miteinander verglichen. Abbildung 5 zeigt das Ergebnis dieses individuellen Vergleichs in Form einer Kreuztabelle (Angaben in Prozent).

---

[4] Es wurden zwei Cluster von Aufgaben gebildet, die die beiden Typen charakterisieren. Beide Aufgaben-Cluster enthalten jeweils 30 Aufgaben. Bei allen Aufgaben war die Summe größer als 10 und der erste Summand größer als der zweite. „Kleine handelnde Zahl" heißt: erster Summand größer als 6, zweiter Summand 2,3 oder 4. „Große handelnde Zahl" heißt: erster Summand größer als 5, zweiter Summand größer als 4.

handelnde Zahl			**groß**	
			FALSCH	RICHTIG
			21,44	78,56
klein	FALSCH	15,75	9,38	6,37
	RICHTIG	84,25	12,02	72,22

Abb. 5: Handelnde Zahl im individuellen Vergleich

Über 72 Prozent der Kinder haben beide Aufgaben richtig gelöst, weniger als 10 Prozent beide falsch. Den Unterschied im Schwierigkeitsgrad charakterisieren die beiden schattierten Felder: Es gibt fast doppelt so viele Kinder, die die Aufgabe mit der kleinen „handelnden“ Zahl richtig, die mit der großen aber falsch gelöst haben, wie umgekehrt. Der Unterschied ist mit 5,65 Prozent signifikant. Die „handelnde“ Zahl ist in dieser Phase ein entscheidender Parameter für die Sicherheit des Rechnens.

3.2 Die Kommutativität

Wird die Bedeutung von Tauschaufgaben von den Kindern bereits erkannt und genutzt? Nutzen die Kinder das *„Kommutativgesetz“* bei Aufgaben, bei denen der erste Summand kleiner als der zweite ist, auch wenn sie die jeweiligen Tauschaufgaben nicht unmittelbar vorher berechnet haben?

Dazu wurde ein *individueller Vergleich* angestellt, zu dessen Zweck Aufgaben und Tauschaufgaben gegenübergestellt wurden („groß + klein“ vs. „klein + groß“). Zum Vergleich wurden nur Aufgaben herangezogen, bei denen die Summe größer als 10 und höchstens 20 ist. Außerdem wurden Aufgaben mit der „handelnden“ Zahl 2, 3 oder 4 und getrennt von solchen mit der „handelnden“ Zahl 5 oder 6 untersucht; bei den letzteren wurden nur die Aufgaben ohne Zehnerüberschreitung, also mit einem Summanden größer als Zehn betrachtet. Die beiden Kreuztabellen in Abbildung 6 zeigen den individuellen Vergleich zwischen Aufgaben und Tauschaufgaben.

			klein + groß	
			Falsch	Richtig
			16,39	83,61
groß + klein	Falsch	13,98	7,64	6,33
	Richtig	86,02	8,75	77,28

			klein + groß	
			Falsch	Richtig
			19,97	80,03
groß + klein	Falsch	17,82	11,03	6,79
	Richtig	82,18	8,94	73,24

Abb. 6: Nutzung der Kommutativität im individuellen Vergleich

Über 70 Prozent der Kinder haben die Aufgaben, gleich in welcher Form dargeboten, ob als 14 + 3 oder 3 + 14, richtig gelöst. Natürlich gibt es Kinder, die den einen

Aufgabentyp richtig lösen, den anderen nicht. Wenn dabei die Reihenfolge der Summanden eine Rolle spielen würde, müsste sich das in den grau schattierten Feldern zeigen. Wir sehen aber, dass der Unterschied zwischen der Gruppe, die Aufgaben des Typs „groß + klein" richtig und Aufgaben des Typs „klein + groß" falsch lösen, und der Gruppe, die Aufgaben des Typs „klein + groß" richtig und Aufgaben des Typs „groß + klein" falsch lösen, geringfügig ist (2,42 Prozent bzw. 2,15 Prozent). Kinder nutzen also intuitiv die Kommutativität schon sehr früh. Sie gehört offenbar zum Grundverständnis der Addition, das durch den Umgang mit entsprechendem Material in der Eingangsphase entwickelt wird.[5]

3.3 Die Zahl Zehn

Hat sich die Zahl Zehn als *Schwellenzahl* oder als *Hinderniszah*l herausgestellt? Dazu wurden Aufgaben mit kleiner „handelnder" Zahl herangezogen und zu zwei neuen Clustern zusammengefasst, je nachdem ob eine Zehnerüberschreitung erfolgt oder nicht.[6]

Die

			x+y > 10	
			FALSCH	RICHTIG
			19,54	80,46
x+y ≤ 10	FALSCH	15,47	6,92	8,55
	RICHTIG	84,53	12,21	72,32

Abb. 7: Zehnerüberschreitung im individuellen Vergleich

Kreuztabelle in Abbildung 7 zeigt, dass über 72 Prozent der Kinder beide Aufgaben gelöst haben. Über 12 Prozent der Kinder, die die Aufgabe ohne Zehnerüberschreitung richtig gelöst haben, hatten Schwierigkeiten bei der Aufgabe mit Zehnerüberschreitung, während es im umgekehrten Fall knapp 9 Prozent waren. Der Unterschied ist nicht groß, deutet aber an, dass die Zahl Zehn für die Kinder eine gewisse Schwelle bei der rechnerischen Sicherheit darstellt. Die Aufgaben im Zahlenraum bis Zehn werden häufiger richtig gelöst als die Aufgaben im Zahlenraum von 10 bis 20. Die Vermutung, die Zahl Zwölf, die ja in der mündlichen Zahlreihe eine Zäsur zwischen den Eigennamen und den zusammengesetzten Namen darstellt, könnte eine ähnliche Schwelle bilden, hat sich in der Pilot-Studie nicht bestätigt.

Aufgaben mit Zehn als Summand oder Ergebnis werden zu einem hohen Prozentsatz richtig gelöst. Sie bilden sozusagen Orientierungspunkte in der inneren Landkarte des

---

[5] Ob die Kommutativität in den Test-Klassen angesprochen wurde, war nicht feststellbar. Im benutzten Schulbuch war sie erst später Thema. Eine Konsequenz dieser Feldstudie ist, dass in der Neubearbeitung des Schulbuchs die Kommutativität schon in der Einführungsphase bewusst gemacht wird. (vgl. auch Abschnitt 5)

[6] Das Cluster „x+y ≤ 10" umfasst die Aufgaben 6+2, 7+2, 8+2, 6+3, 7+3, 6+4, das Cluster „x+y > 10" die Aufgaben 9+2, 9+3, 9+4, 8+3, 8+4, 7+4. N = 737

Einspluseins. Die Kinder nutzen also die besondere Rolle, die die Zahl Zehn in unserer mündlichen wie schriftlichen Zahlwort-Reihe spielt.

3.4 Die Verdopplungsaufgaben

Die Tests wurden im Anschluss an die materialgebundene Einführung des Addierens durchgeführt. Beim Umgang mit gewissen Materialien (z.B. Wendeplättchen im Zusammenhang mit „Rechenschiffen" oder mit einem „Zwanziger-Feld") liegt gerade beim Verdoppeln eine andere Strategie nahe als die des linearen Hinzufügens. Sind Verdopplungsaufgaben deshalb einprägsamer?

Der *globale Vergleich* (Abb. 8) zeigt, dass Kinder die Verdopplungsaufgaben bis 5 + 5 sehr gut gelöst haben, während die Aufgaben 6 + 6 bis 9 + 9 mit zunehmender Größe der Summanden schlechter berechnet wurden. Die Verdopplungsaufgabe 10 + 10 dagegen unterstreicht wieder die besondere Rolle der Zehn. Es ist zu vermuten, dass Kinder Aufgaben bis 5 + 5 bereits als Verdopplungsaufgaben automatisiert haben, also diesen Aufgabentyp erkennen und diese nicht durch Weiterzählstrategien gelöst werden.

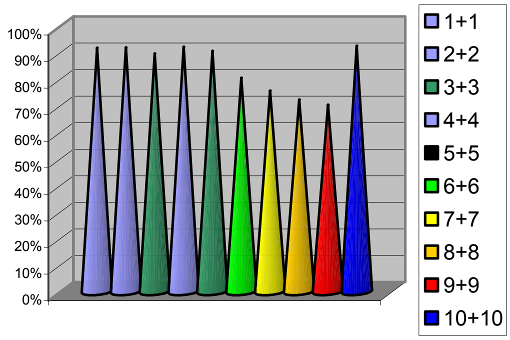

Abb. 8: Verdopplungsaufgaben

Ein *individueller Vergleich* (Abb. 9) zeigt die Gegenüberstellung der Bearbeitung der Aufgabe 7 + 7 im Vergleich zu den Aufgaben in der „Umgebung"[7]. Die Verdopplungsaufgabe 7 + 7 wird etwas besser gelöst: Gut 11 Prozent der Kinder, die 7 + 7 richtig lösen, machen einen Fehler bei der Nicht-Verdopplung; umgekehrt sind es nur gut 8 Prozent. Damit zeigen sich Ansätze für eine besondere Rolle der Verdopplungsaufgaben, wenn auch nicht sehr ausgeprägt.

[7] Gemeint sind die Aufgaben des Clusters oberhalb von 7+7 in Abbildung 3. N = 252

			oberes Cluster von 7+7	
			FALSCH	RICHTIG
			26,98	73,02
7+7	FALSCH	24,21	15,87	8,33
	RICHTIG	75,79	11,11	64,68

Abb. 9: Die Aufgabe 7+7 im individuellenVergleich

4 Ergebnisse des Subtraktionstests[8]

Mehr noch als beim Additionstest wird so manchen das "gute" Gesamtergebnis des Subtraktionstests verblüffen. Über drei Viertel aller Schülerinnen und Schüler (77 Prozent) haben mehr als die Hälfte, also mindestens elf der 21 Aufgaben richtig gerechnet, zehn Prozent sogar alle 21 Aufgaben. Selbst die Aufgabe mit den wenigsten richtigen Lösungen, nämlich 19 – 14, wurde noch von 40 Prozent der Kinder gelöst – wie gesagt: gegen Ende des ersten Schulhalbjahres. Abbildung 10 gibt an, wie viel Prozent der Kinder, denen die jeweilige Subtraktionsaufgabe zur Bearbeitung vorgelegt wurde[9], ein richtiges Ergebnis notierten.

[8] Methodische Details wie auch weitere Einzelergebnisse zum Subtraktionstest findet man in Rinkens, H.-D./Eilerts, K./Schaper, K. (2004)

[9] N liegt zwischen 141 und 287, Median 239

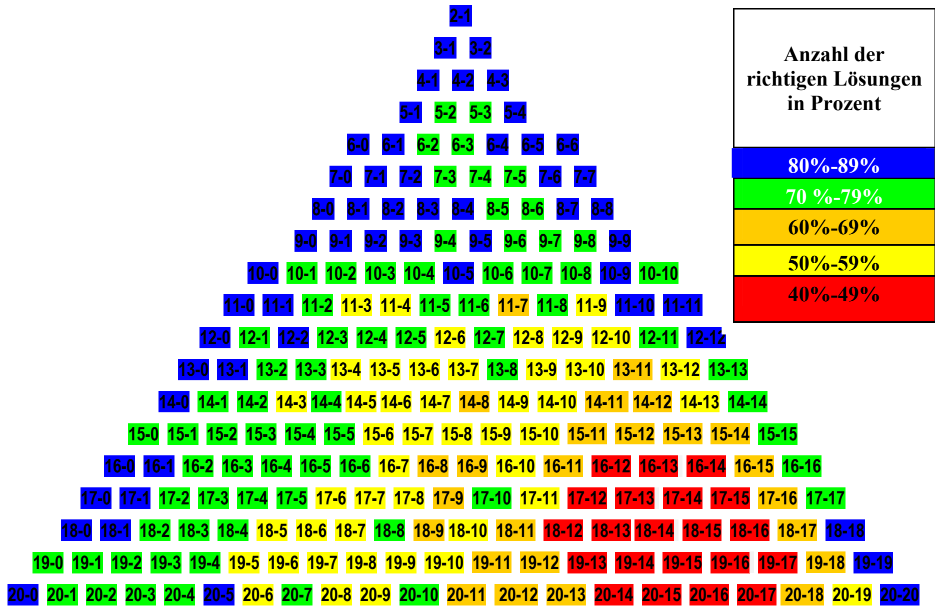

Abb. 10: Ergebnisse des Subtraktionstests (Übersicht)

4.1 Die „handelnde“ Zahl

Wie beim Additionstest bestätigt sich auch hier: Die Kinder verlieren mit zunehmender Größe der beiden Rechenzahlen die *Sicherheit in der Zahlreihe*. So wurden zum Beispiel Aufgaben mit der Zehn als Minuend durchgehend schlechter gelöst als Aufgaben mit der Neun oder der Acht als Minuend. Aufgaben mit einem großen Minuend und einem großen Subtrahend (beide über Zehn) bereiteten den Kindern die größten Schwierigkeiten.

Beim Addieren wird von den Kindern in der Regel der kleinere Summand als „handelnde“ Zahl im Sinne des Hinzufügens gewählt – besonders dann, wenn der Unterschied zwischen beiden Summanden groß ist. Die „Rechtfertigung“ liegt im Grundverständnis für die Kommutativität des Addierens, die sich ja in den Grundvorstellungen des „Zusammenlegens, -sehens, -...“ widerspiegelt. Anders beim Subtrahieren. Hier dominiert das Wegnehmen als Grundvorstellung. Folglich ist nur der Subtrahend die „handelnde“ Zahl. Es fehlt sozusagen die „Gleichberechtigung“ der beiden Zahlen einer Minus-Aufgabe – solange Subtrahieren nur Abziehen und nicht auch Ergänzen heißen kann (s.u.).

Entscheidende Bedeutung für die richtige Bearbeitung einer Subtraktionsaufgabe hat die „handelnde“ Zahl: Aufgaben mit einem Subtrahend kleiner als fünf konnten von mehr Kindern richtig bearbeitet werden als die Aufgaben mit einem Subtrahend größer als vier.

Bei den Aufgaben in Abbildung 11 – das sind Aufgaben ohne Zehnerüberschreitung mit einem Minuend über 14 – wurden Aufgaben, die einen Subtrahend kleiner als 5 haben, von mindestens 70 Prozent aller Kinder richtig bearbeitet.

				15–4	15–5				
			16–3	16–4	16–5	16–6			
		17–2	17–3	17–4	17–5	17–6	17–7		
	18–1	18–2	18–3	18–4	18–5	18–6	18–7	18–8	
19–0	19–1	19–2	19–3	19–4	19–5	19–6	19–7	19–8	19–9
20–0	20–1	20–2	20–3	20–4	20–5	20–6	20–7	20–8	20–9

80%-89% 70%-79% 40%-49%

Abb. 11: Bedeutung der „handelnden“ Zahl

Bei Aufgaben mit dem Subtrahend 5 ist das Ergebnis uneinheitlich; beachtenswert ist das gute Abschneiden von 20 – 5. Die Aufgaben mit einem Subtrahend größer als 5 wurden „nur noch“ von 50 bis 60 Prozent aller Kinder richtig bearbeitet.

4.2 Die Zahl Zehn

Beim Additionstest hatten wir schon auf die „zwei Gesichter der Zehn“ hingewiesen: Zum einen bahnt sich bei den Kindern schon sehr früh eine Einsicht und das entsprechende Ausnutzen des dezimalen Aufbaus unserer (mündlichen und schriftlichen) Zahlwort-Reihe an; zum andern stellt das Überschreiten der Zehn eine Schwelle in der Sicherheit des Rechnens dar. Ähnliches lässt sich bei der Subtraktion feststellen.

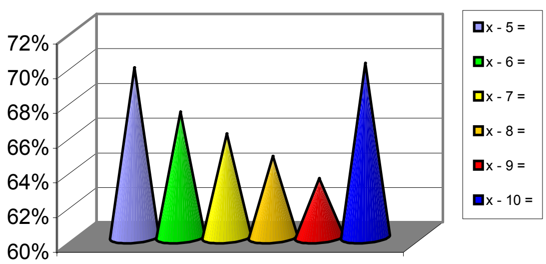

Abb. 12: Die Rolle der Zehn in der Zahlnreihe

Zwar spielt die Größe der beiden Rechenzahlen und dabei insbesondere die der "handelnden" Zahl die entscheidende Rolle bei der Beurteilung des Schwierigkeitsgrades einer Aufgabe.

Gleichwohl findet man schon Ansätze von *Einsicht in den Bündelungs-Aspekt*, der unserem Stellenwertsystem und auch den gesprochenen Zahlen jenseits der Zwölf zugrunde liegt. Abbildung 12 zeigt: Je größer die handelnde Zahl ist, desto schlechter werden die Aufgaben berechnet. Die Zehn durchbricht diese Regel, ist also "eine besondere Zahl".

Um die Zehnerüberschreitung genauer zu analysieren, wurden die Aufgaben mit einem Minuend größer als Zehn und einem Subtrahend kleiner als Zehn herangezogen und ein *individueller Vergleich* angestellt. Das Ergebnis dieses individuellen Vergleichs[10] zeigt die Kreuztabelle in Abbildung 13.

			mit Zehnerüberschreitung	
			FALSCH	RICHTIG
			44,38	55,62
ohne Zehnerüberschreitung	FALSCH	29,05	19,90	9,15
	RICHTIG	70,95	24,47	46,48

Abb. 13: Zehnerüberschreitung im individuellen Vergleich

Fast ein Viertel der Kinder, die die Aufgabe ohne Zehnerüberschreitung richtig gelöst hatten, hatte Schwierigkeiten bei der Aufgabe mit Zehnerüberschreitung, während es im umgekehrten Fall nur knapp zehn Prozent waren. Das bestätigt: Die Zahl Zehn stellt eine Hinderniszahl beim Subtrahieren im Zahlenraum bis Zwanzig dar.

Alle bisherigen Resultate spiegeln sich in den Aufgaben mit dem Minuend Zwanzig wieder: Die Aufgaben, die am häufigsten richtig bearbeitet wurden, sind diejenigen mit einem kleinen Subtrahend oder mit Zehn oder Zwanzig als Subtrahend. Es gibt einen klaren Schnitt zwischen den Aufgaben mit einem Subtrahend, der kleiner bzw. größer als Zehn ist. Letztere wurden von vielen Kindern falsch oder gar nicht bearbeitet.

4.3 Subtrahieren durch Ergänzen

"11 – 10 ist leicht, 11 – 9 nicht" – so könnte man ein weiteres Resultat der Feldstudie zusammenfassen. In Klasse 2 würden wir uns wünschen, dass ein Kind eine Aufgabe wie $51 - 48 = x$ nicht durch Abziehen (sei es schrittweise oder bündelweise), sondern durch Ergänzen ($48 + x = 51$) löst. Wie schon erwähnt, steht allerdings in der Einführungsphase der Subtraktion im Anfangsunterricht die Grundvorstellung des Wegnehmens im Vordergrund: Eine Sachsituation soll ja zu einer Minus-Aufgabe und nicht zu einer Plus-Aufgabe mit unbekanntem Summanden führen. Der operative

10 N=2427

Zusammenhang zwischen Subtrahieren und Addieren wird dann meist durch die nahe liegende Verbindung von Wegnehmen und Hinzufügen hergestellt: Danach entspricht der Aufgabe 8 – 3 = 5 die Aufgabe 5 + 3 = 8 (nicht 3 + 5 = 8). Dieser enge Zusammenhang, der meist mit „Aufgabe und Umkehraufgabe“ umschrieben wird, ist aber gerade *nicht* hilfreich beim Lösen von 51 – 48 = x; denn x + 48 = 51 ist wegen der fehlenden Startzahl nicht durch Hinzufügen zu lösen. Er muss sozusagen durch die Kommutativität der Addition gelockert werden. Anders ausgedrückt: Wie die Kommutativität zum Grundverständnis der Addition gehört, so muss zum Grundverständnis des Subtrahierens die Gleichberechtigung von Abziehen und *Ergänzen* gehören. (Diese Gleichberechtigung kommt zum Beispiel bei der Berechnung des Unterschieds zweier Größen/ Zahlen entscheidend zum Tragen.) Wie steht es damit am Ende der Einführungsphase des Subtrahierens?
Was wir oben über die Rolle der Null gesagt haben, gilt in ähnlicher, aber abgeschwächter Weise für Nachbar-Zahlen: Nachbar-Zahlen (Unterschied Eins) werden als solche "gesehen". Dieser "Blick für Nachbar-Zahlen" ist allerdings noch nicht gefestigt: Er schwächt sich mit wachsender Größe der Zahlen ab (Abb. 14).

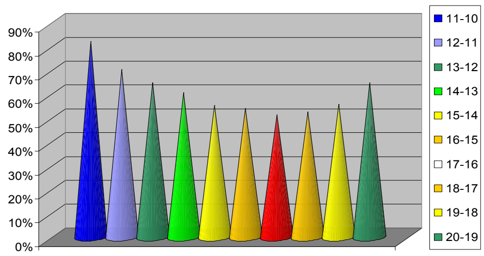

Abb. 14: Subtraktion von Nachbar-Zahlen

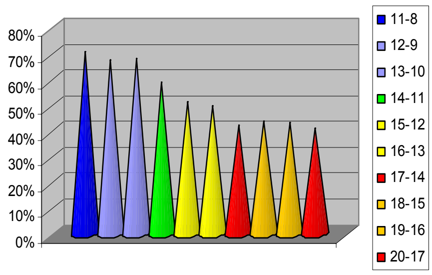

Abb. 15: Subtrahieren als Ergänzen

Dieser "Blick für Nachbar-Zahlen" wird vor allem nicht auf die nähere Umgebung übertragen: Aufgaben mit dem Ergebnis Zwei oder Drei werden deutlich schlechter gelöst (Abb. 15). Ein besonders kräftiger Abschwung ergab sich beim Minuend Elf: Während 82 Prozent der Kinder, denen die Aufgabe 11 – 10 vorgelegt wurde, das richtige Ergebnis notierten, waren dies bei der Aufgabe 11 – 9 nur noch 67 Prozent.

5 Fehleranalyse

Den Additionstest haben 2086 Kinder (84 Prozent) und den Subtraktionstest 1812 Kinder (75Prozent) komplett bearbeitet. Beim Additionstest haben 823 Kinder (33 Prozent) und beim Subtraktionstest 248 Kinder (10 Prozent) *alle* 21 Aufgaben *richtig* gelöst. Im Schnitt haben die Kinder 4,3 Fehler im Additionstest und 6,0 Fehler im Subtraktionstest gemacht.

Obwohl es im Vergleich zu den richtig bearbeiteten Aufgaben nicht viele falsche Lösungen gibt, ist wegen der hohen Zahl der an den Tests beteiligten Kinder die Grundgesamtheit der Aufgaben mit falschen Lösungen groß: beim Additionstest 7166 und beim Subtraktionstest fast doppelt so viele, nämlich 13037. Sie bilden die Basis für die nachstehenden Analysen.

Wir haben den Versuch unternommen, die auftretenden Fehler nach ihrer Häufigkeit zu typifizieren. Vergleichsweise häufig auftretende Fehlertypen sind:

- Verzählfehler: Das Ergebnis weicht um +1 oder –1 von der richtigen Lösung ab.
- Operationsfehler: Die Rechenoperation wird verwechselt (+ statt – oder umgekehrt).
- Perseverationsfehler: Eine Ziffer oder Zahl wird aus der Aufgabenstellung ins Ergebnis übertragen.
- Stellenwertfehler: Es wird mit den Ziffern der Einer-Stelle gerechnet; die Zehner-Stelle wird nicht berücksichtigt oder falsch übertragen.

Abbildung 16 zeigt die Häufigkeit der genannten Fehlertypen.[11] Der häufigste Fehler beim Additionstest ist das Verzählen um -1, er macht 17 Prozent der Fehler aus. Zusammen mit dem Verzählen um +1 ist dieser Fehlertyp mit kapp 30 Prozent der mit Abstand häufigste. Gleiches gilt mit über 25 Prozent auch für die Subtraktion.

	Verzähl-fehler –1	Verzähl-fehler +1	Stellen-wert-fehler	Perseve rations-fehler	Opera-tions-fehler
Addition	16,98	12,34	5,69	9,15	4,81
Subtraktion	12,86	12,45	16,09	9,66	2,55

Abb. 16: Häufigste Fehlertypen

Addition und Subtraktion unterscheiden sich hinsichtlich zweier Fehlertypen deutlich. Stellenwertfehler kommen bei der Subtraktion fast dreimal so häufig vor wie bei der Addition (16,09 Prozent gegenüber 5,69 Prozent), dagegen Operationsfehler nur etwa halb so oft (2,55 Prozent gegenüber 4,81 Prozent).

Man kann noch eine Reihe weiterer Fehlerarten hinsichtlich ihrer Entstehung deuten (zum Beispiel das Vertauschen der Ziffern). Sie kommen aber in der Gesamtbilanz vergleichsweise sehr selten vor. Insgesamt sind allerdings die von den Kindern gemachten Fehler nur rund zur Hälfte den oben genannten Fehlertypen zuzuordnen. Nicht nur beim richtigen Lösen, auch beim Fehlermachen sind Kinder „erfinderisch“ und gehen „auf eigenen Wegen“.

[11] Der Prozentsatz bezieht sich auf die Gesamtzahl der falsch gelösten Aufgaben (7166 bei der Addition und 13037 bei der Subtraktion), nicht bearbeitete Aufgaben ausgeschlossen.

5.1 Verzählfehler

Additions- und Subtraktionsaufgaben werden zum Schulbeginn meist mit Hilfe von *Zählstrategien* gelöst. Im Laufe des Anfangsunterrichts setzen die Schüler zunehmend heuristische Strategien, basierend auf dem Grundverständnis der Operationen, ein, um neue Aufgaben auf bekannte, leichtere Aufgaben zurückzuführen.

Die Verzählfehler erklären sich durch eine fehlerhafte Mischung der beiden konstituierenden Elemente der Zählstrategien, des „richtigen Anfangs“ und der „richtigen Deutung der Endzahl“. Die Aufgabe 5 + 3 wird durch Weiterzählen in der Regel so gelöst: (5) 6 7 8; der richtige Anfang des Weiterzählens ist nicht 5 sondern 6; die Endzahl 8 ist das Ergebnis der Additionsaufgabe. Die Aufgabe 8 – 3 wird durch Rückwärtszählen in der Regel so gelöst: 8 7 6 (5); der richtige Anfang des Rückwärtszählens ist 8; die Endzahl 6 ist nicht das Ergebnis der Subtraktionsaufgabe, sondern die nächste Zahl in der Zählreihe rückwärts.

Beim Addieren entsteht der Verzählfehler um –1 zum Beispiel bei der Aufgabe 5 + 3 in der Regel durch den falschen Anfang des Weiterzählens bei der 5 und die (bei der Addition im Prinzip richtige) Deutung der Endzahl 7 als Ergebnis. Der Verzählfehler um +1 kann durch den richtigen Anfang 6 und die falsche Deutung, dass (analog zum Subtrahieren) nicht die Endzahl 8 sondern die nächste Zahl in der Zählreihe vorwärts das Ergebnis ist, erklärt werden.

Beim Subtrahieren entsteht der Verzählfehler um +1 zum Beispiel bei der Aufgabe 8 – 3 in der Regel durch den richtigen Anfang 8 und die falsche Deutung der Endzahl 6 als Ergebnis (analog zum Addieren). Der Verzählfehler um –1 kann durch den falschen Anfang des Rückwärtszählens nicht bei der 8 sondern bei der 7 (analog zum Addieren) und die (bei der Subtraktion im Prinzip richtige) Deutung, dass nicht die Endzahl 4 sondern die nächste Zahl in der Zählreihe rückwärts das Ergebnis ist, entstehen.

Die Aufgabe 11+7 wurde 237mal bearbeitet und 25mal verrechneten sich die Kinder um –1. Mit fast 11 Prozent tritt der Fehler bei dieser Aufgabe am häufigsten auf. Der Summand 11 scheint überhaupt besonders anfällig für diesen Fehler zu sein: Von den zehn Additionsaufgaben, bei denen am häufigsten der Verzählfehler um –1 auftrat, hatten acht den Summand 11. Umgekehrt scheint der Summand 9 zum Verzählfehler um +1 zu verleiten: In den zehn Additionsaufgaben, bei denen am häufigsten der Verzählfehler um +1 vorkam, trat nur einmal der Summand 9 nicht auf.

Verzählfehler hängen von der Größe der „handelnden“ Zahl – das ist die Zahl, um die weiter- bzw. rückwärts gezählt wird – ab. Interessant ist die Frage, ob bei einem Kind Verzählfehler beiden Typs auftauchen. Dazu ist ein individueller Vergleich notwendig (Abb. 17). Von den 2492 Kindern im Additionstest haben 1360 Schüler keinen dieser beiden Fehler gemacht, das sind knapp 55 Prozent. Umgekehrt: Bei nahezu der Hälfte der Kinder tritt er bisweilen noch auf, und zwar häufiger in der Form des Verzählens um –1. Diese Tendenz ist allerdings nicht so stark ausgeprägt wie erwartet. Bei fast 12 Prozent der Kinder kommen beide Fehlertypen vor.

Addition			**Verzählen um +1**	
			nein	ja
			74,17	25,83
Verzählen um -1	nein	68,43	54,55	13,88
	ja	31,57	19,61	11,95

Subtraktion			**Verzählen um +1**	
			nein	ja
			59,54	40,46
Verzählen um -1	nein	60,73	38,52	22,21
	ja	39,27	21,01	18,25

Abb. 17: Verzählfehler im +1 und um -1 im individuellen Vergleich

Von den 2427 Teilnehmern des Subtraktionstests haben über 60 Prozent einen Verzählfehler gemacht. Beide Verzählfehler kommen annähernd gleich häufig vor.

5.2 Fehlerstrategien

Unter einer Fehlerstrategie wollen wir ein systematisches Vorgehen beim Lösen von Aufgaben gleichen Typs verstehen, das in der Regel zu einem falschen Ergebnis führt. Man kann eine Fehlerstrategie also zum Beispiel dadurch untersuchen, dass man die Häufigkeit desselben Fehlertyps bei einem Kind in den Blick nimmt. Tritt ein Fehler nur vereinzelt auf, sind fundierte Aussagen über die Gründe des Fehlers kaum möglich. Zum einen gibt es in unserer Feldstudie keine verwertbaren zusätzlichen Informationen über den Rechenweg des Kindes. Zum anderen kann es sich auch um einen Flüchtigkeitsfehler handeln.

Auf der Suche nach Fehlerstrategien wurden die Testhefte der einzelnen Kinder daraufhin geprüft, ob bei den 21 Aufgaben derselbe Fehlertyp mehrmals vorkam. In Abbildung 18 und 19 ist in der letzten Zeile (N =) vermerkt, wie viele Kinder überhaupt mindestens einen Fehler des jeweiligen Typs gemacht haben. Ansonsten gibt die Tabelle an, bei wie viel Prozent dieser Kinder der Fehlertyp einmal, zweimal, dreimal oder öfter auftrat.

Häufig-keit des Fehlers	Verzähl fehler –1	Verzähl fehler +1	Stellen-wert-fehler	Perseve rations-fehler	Opera-tions-fehler
einmal	65,44	74,53	73,54	68,78	80,17
zweimal	22,24	19,10	19,59	20,00	11,64
dreimal	8,64	4,50	3,78	5,37	3,45
öfter	2,98	1,87	3,09	5,86	4,74
N =	787	644	291	410	232

Abb. 18: Fehlerstrategien bei der Addition

Es gibt in der gesamten Feldstudie nur ein Kind, welches systematisch einen Fehlertyp durchgehend angewendet hat und zwar erstaunlicher Weise den Verzählfehler um +1. Ansonsten ist es eine Frage der Interpretation, ab welcher Häufigkeit man schon von einer Strategie reden will. Bei der Addition wiederholen Kinder, die einen Verzählfehler um –1 machen, dies in einem Drittel der Fälle mindestens noch einmal und in 15 Prozent der Fälle öfter. Ganz Ähnliches gilt für die Verzählfehler bei der Subtraktion.

Häufigkeit des Fehlers	Verzähl fehler –1	Verzähl fehler +1	Stellenwertfehler	Perseverationsfehler	Operationsfehler
einmal	62,26	64,77	51,39	66,39	76,39
zweimal	22,75	21,08	21,00	24,34	14,59
dreimal	7,23	8,25	13,81	7,11	5,15
öfter	7,76	5,90	13,80	2,16	3,87
N =	953	982	1043	829	233

Abb. 19: Fehlerstrategien bei der Subtraktion

Der Stellenwertfehler ist ein „Markenzeichen" der Subtraktion, hier allerdings vor allem der Aufgaben mit zweistelligem Subtrahenden. Man findet ihn bei 1043 der 2427 Testteilnehmer und dort in nahezu der Hälfte der Fälle gleich mehrfach, mehr als dreimal sogar in 14 Prozent der Fälle.

Das letztgenannte Phänomen ist ein Hinweis darauf, dass Fehlerstrategien nicht nur durch die Beschreibung des fehlerhaften Lösungsprozesses (Fehlertyp) zu charakterisieren sind, sondern dass das numerische Material auch eine wesentliche Rolle spielt. Die Zahlen der Aufgabe haben so etwas wie eine Wegweiser-Funktion: Sie können auch auf den falschen Weg leiten.

6 Zusammenfassung und Folgerungen

1. Die Feldstudie wurde am Ende der material- und handlungsorientierten Einführungsphase des Addierens und des Subtrahierens durchgeführt. Berücksichtigt man die Anlage der Feldstudie, 21 Aufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrads ohne das explizite Angebot von Lernmaterial zu lösen, erstaunt das positive Gesamtergebnis sowohl bei der Addition wie bei der Subtraktion. Im Sinne der Rechenfertigkeit im Einspluseins und Einsminuseins ist die Quote der falsch oder nicht gelösten Aufgaben natürlich noch zu hoch. Aber es ist sicher berechtigt, schon in dieser Phase von beginnender Rechenfertigkeit zu sprechen. Die Mehrzahl der Kinder braucht kein Material, um zur Lösung zu kommen, ist aber noch stark im zählenden Rechnen verhaftet. Im Hinblick auf die Ergebnisse der

Studie scheint es sinnvoll, den Materialeinsatz nunmehr in zwei Richtungen zu konzentrieren. Zum einen ist er weiterhin unerlässlich zur Förderung der Kinder, die noch erkennbare Probleme bei der Entwicklung von Grundvorstellungen der Operationen haben. Zum andern sollte er mit dem Ziel erfolgen, die Kinder Zusammenhänge im Netzwerk des Einspluseins und Einsminuseins entdecken zu lassen, um auf diese Weise die Sicherheit in der Zahlreihe zu stärken. Dazu ist nicht jedes Material geeignet, vor allem dann nicht, wenn es nicht vom zählenden Rechnen und dem damit verbundenen häufigsten Fehler des Verzählens wegführt.

2. Der wichtigste Zusammenhang im Netzwerk des Einspluseins ist die Kommutativität. Sie ist eine entscheidende Rechenhilfe, reduziert sie doch drastisch den zu automatisierenden Kanon an Rechensätzen. Sie kann schon in der materialgebundenen Einführungsphase entdeckt und sie sollte dort auch bewusst gemacht werden; denn die Einsicht in die Kommutativität gewinnt man nicht durch viele Beispiele und schon gar nicht an großen Zahlen, sondern durch die doppelte Deutung (a + b und b + a) derselben Situation. Sie gehört zum Grundverständnis der Addition und ist eine Voraussetzung für die Entwicklung von Rechenfertigkeit.
3. Der Subtraktion fehlt die vergleichbare offensichtliche Eigenschaft, die den Kanon der zu automatisierenden Aufgaben reduziert. Das ist sicher einer der Gründe, warum die Subtraktion als schwieriger empfunden wird als die Addition. In der Feldstudie lagen die Ergebnisse im Subtraktionstest deutlich unter denen des Additionstests. Was bedeutet das für den Anfangsunterricht? Die Subtraktion im Curriculum soweit nach hinten zu verlagern, bis das Einmaleins automatisiert ist, und dann auf den Zusammenhang von Aufgabe und Umkehraufgabe zu setzen, um das Einsminuseins zu erarbeiten, scheint uns unangemessen, da so der operative Zusammenhang zwischen Addition und Subtraktion, der zum Grundverständnis beider Operationen gehört, viel zu spät zur Sprache kommt. Dann muss allerdings die Konsequenz sein, der Subtraktion im Unterricht und in den Übungen mehr Aufmerksamkeit zu widmen.
4. Die Zahl Zehn hat ein doppeltes Gesicht. Obwohl der Bündelungsaspekt unserer (schriftlichen) Zahldarstellung erst im Zahlenraum bis Hundert und später voll zum Tragen kommt, entwickeln die Kinder schon früh ein intuitives Verständnis für die besondere Rolle der Zehn. Entsprechendes Material im Anfangsunterricht verstärkt in der Regel diese Einsicht. So werden Aufgaben des Typs „x + 10“ bzw. „x – 10“ deutlich besser gelöst als andere. Die Kehrseite ist die „Schwelle“ Zehn beim Rechnen, die ja „eigentlich“ keine Rolle spielen dürfte, wenn die Kinder durch Weiter- bzw. Rückwärtszählen zum Ergebnis kommen und sicher in der Zahlreihe wären. Aber die Sicherheit nimmt mit der Größe der Zahlen in der Rechenaufgabe ab. Ganz entscheidend ist dabei die „handelnde“ Zahl; das ist in der Regel bei der Addition der kleinere Summand, bei der Subtraktion der Subtrahend. Die schwierigsten Aufgaben, so bestätigt der Test, sind die Aufgaben mit zwei „großen“ Zahlen, bei denen zwangsläufig die „handelnde“ Zahl auch groß ist. Hier sind im weiteren Verlauf des Unterrichts Rechenhilfen zu thematisieren, sei es die Schwellenzahl Zehn als Anker-Zahl („Zehnerüberschreitung“) oder – allerdings nur bei der Addition – Verdopplungsaufgaben. Keine dieser Hilfen ist selbstverständlich oder näher liegend als die andere.

5. Flexibles Rechnen erfordert ein zunehmendes Repertoire an Rechenstrategien. Keime sind schon früh vorhanden, sie müssen im Unterricht zur Entfaltung gebracht werden. Insbesondere der "Zahlenblick" muss weiter geschärft werden. Aufgaben mit der Null (Null als Summand bzw. Null als Subtrahend oder Differenz) haben im Test den wenigsten Kindern Schwierigkeiten bereitet. Auch bei der Subtraktion von Nachbar-Zahlen führt offensichtlich das "Sehen" zur Lösung. Dieses sollte im Unterricht als Ansatz genommen werden, um den „Blick für die Nachbarschaft“ weiterzuentwickeln, der dann zum Ergänzen als alternativem Weg für die Lösung einer Subtraktionsaufgabe führt. Wie bei Additionsaufgaben die Reihenfolge der Summanden für die Kinder keine entscheidende Rolle spielt (Anwendung der Kommutativität), so sollte schließlich bei Subtraktionsaufgaben der Rechenweg (Abziehen oder Ergänzen) von der leichteren Zugänglichkeit her entschieden werden. Das kann subjektiv unterschiedlich sein, setzt aber in jedem Fall Einsicht in die Gleichberechtigung beider Wege voraus.

7 Literatur

Gooßen, E. [2003]: Feldstudie zu den arithmetischen Fähigkeiten von Erstklässlern: Ausgewählte Fragestellungen. Paderborn: Universität Paderborn, Fachbereich Mathematik, unveröffentlichte Examensarbeit.

Grassmann, M. & Mirwald, E. & Klunter, M. & Veith, U. [1995]: Arithmetische Kompetenz von Schulanfängern – Schlussfolgerungen für die Gestaltung des Anfangsunterrichtes. In: *Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe*, 7 (1995), 302-303, 314-321.

Heimann, M. [2002]: Arithmetische Fähigkeiten von Erstklässlern im Bereich des Addierens nach der materialgebundenen Einführungsphase – eine Feldstudie. Paderborn: Universität Paderborn, Fachbereich Mathematik, unveröffentlichte Examensarbeit.

Heuvel-Panhuizen, M.[1995]: Leistungsmessung im aktiv entdeckenden Mathematikunterricht. In: Brügelmann, H. & Balhorn, H. & Füssenich, I.(Hg.): *Am Rande der Schrift*. Lengwil: Libelle Verlag.

Knapstein, K. & Spiegel, H. [1995]: Testaufgaben zur Erhebung arithmetischer Vorkenntnisse zu Beginn des 1. Schuljahres. In: Müller, G. & Wittmann, E. (Hg.): *Mit Kindern rechnen*. Frankfurt: Arbeitskreis Grundschule, 65-73.

Rinkens, H.-D. [o. J.]: Arithmetische Fähigkeiten am Schulanfang. http://www.rinkens-hd.de 14.11.2004

Rinkens, H.-D. & Hönisch, K. (Hg.) [2003]: Welt der Zahl. Schulbuch 1. Schuljahr. Hannover: Schroedel Verlag GmbH.

Rinkens, H.-D. & Eilerts, K. & Schaper, K. [2004]: 11-10 ist leicht, 11-9 nicht. Ergebnisse einer Feldstudie zu arithmetischen Fähigkeiten von Erstklässlern im Bereich des Subtrahierens nach der materialgebundenen Einführungsphase. In: Krauthausen, G. & Scherer, P. (Hg.): *Mit Kindern auf dem Weg zur Mathematik – Ein Arbeitsbuch zur Lehrerbildung. Festschrift für Hartmut Spiegel*. Donauwörth: Auer Verlag.

Schaper, K. [2002]: Arithmetische Fähigkeiten von Erstklässern im Bereich des Subtrahierens nach der materialgebundenen Einführungsphase – eine Feldstudie. Paderborn: Universität Paderborn, Fachbereich Mathematik, unveröffentlichte Examensarbeit.

Selter, C. [1995]: Zur Fiktivität der „Stunde Null“ im arithmetischen Anfangsunterricht. In: *Mathematische Unterrichtspraxis*, 16 (1995), 11-19.

Weigt, S. [2001]: Studie zu den arithmetischen Fähigkeiten von Erstklässlern nach der materialgebundenen Einführung des Addierens und Subtrahierens – Pilotstudie. Paderborn: Universität Paderborn, Fachbereich Mathematik, unveröffentlichte Examensarbeit.

Adresse des Autors

Prof. Dr. Hans-Dieter Rinkens
Universität Paderborn
Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik
Fachgruppe `Mathematik-Didaktik`
Warburgerstraße 100
D-33098 Paderborn
Email: rinkens@uni-paderborn.de

Adresse der Autorin

Katja Eilerts
Universität Paderborn
Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik
Fachgruppe `Mathematik-Didaktik`
Warburgerstraße 100
D-33098 Paderborn
Email: eilerts@uni-paderborn.de